Formleg mál og reiknanleiki
RRR

Magni Þór Birgisson

Glósur

Contents

1 Reglulegar Vélar

Eru ákverðanlegar semsagt hætta alltaf einhvern tímann.
Keyra alltaf bara áfram og hafa ekkert minni. DFA = NFA = RE
Ef M_1, M_2 eru Reglulegar vélar
Þá er $\overline{M_1}$, M_1^R, $M_1 \cup M_2$, $M_1 \cap M_2$ og M_1^* einnig Reglulegar vélar

1.1 DFA

DFA = (Q,$\sum$, δ, q_0,F)

Q	=	stöður vélarnar
$\sum$	=	stafróf vélarinnar
δ	=	δ(Q, $\sum$) -> Q
q_0	=	$q_0 \in$ Q
F	=	F $\subseteq$ Q Strengurinn er samþykktur

Verður að vera hægt að komast frá öllum stöðum.
Vélin samþykkir strenginn ef vélin er í $q_n \in$ F
Closure Properties

$\overline{L}$	$F' = Q - F$
L^*	Gera eins og NFA og fara með hana svo aftur í DFA
L^R	Gera eins og NFA og fara með hana svo aftur í DFA
$L_1 \cup L_2$	Gera eins og NFA og fara með hana svo aftur í DFA
$L_1 \cap L_2$	Gera eins og NFA og fara með hana svo aftur í DFA
$L_1 \circ L_2$	Gera eins og NFA og fara með hana svo aftur í DFA

1.2 NFA

NFA = (Q,$\sum$, δ, q_0,F)

Q	=	stöður vélarnar
$\sum$	=	stafróf vélarinnar
δ	=	δ(Q, $\sum$) -> P(Q)
q_0	=	$q_0 \in$ Q
F	=	F $\subseteq$ Q Strengurinn er samþykktur

Það er allt í lagi að geta farið úr einni stöðu í tvær stöður
Vélin samþykkir strenginn ef hægt er að fara á endann einhvern veginn og lokastaðan er í F

Closure Properties

$\overline{L}$	$F' = Q - F$
L^*	Búa til leiða frá öllum endastöðum yfir á q_0 með ε og F=q_0.
L^R	Snúa öllum örvum við þannig að þær benda í hina áttina. Búa til nýja stöðu q_m og tengja öllum endastöðunum með ε setja q_m sem byrjunar staða og q_0 sem endastöðu
$L_1 \cup L_2$	Búa til nýja stöðu q_m og tengja hana við byrjunarstöðina með ε setja q_m sem byrjunar staða
$L_1 \cap L_2$	$\overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$
$L_1 \circ L_2$	Tengja Endastöðurnar í L_1 í byrjunarstöðu á L_2 með ε. Taka svo endarstöður úr L_1

1.3 RE

L($\varnothing$)	=	$\varnothing$
L(ε)	=	ε
L(a)	=	a
L(($R_1 \cup R_2$))	=	L(R_1)$\cup$ L(R_2)
L(($R_1 \circ R_2$))	=	L(R_1)$\circ$ L(R_2)
L((R^*))	=	L(R)*

Closure Properties

$\overline{L}$	Breyta henni NFA og gera eins í NFA og fara með hana svo aftur í RE
L^*	(L)*
L^R	Breyta henni NFA og gera eins í NFA og fara með hana svo aftur í RE
$L_1 \cup L_2$	$(L_1 \cup L_2)$
$L_1 \cap L_2$	Breyta henni NFA og gera eins í NFA og fara með hana svo aftur í RE
$L_1 \circ L_2$	$(L_1 \circ L_2)$

1.4 Dæmi um vélar

1.5 pumpa

Gott til að sanna að málið sé ekki reglulegt en getur ekki sannað það er reglulegt.
$xy^iz \in A \qquad i = 0, 1, 2, ...$
$|y| > 0$
$|xy| \leq p$

ef L er ekki reglulegt þá er $\overline{L}$ heldur ekki reglulegt
ef L_1 er ekki reglulegt þá er $L_1 \cup L_2$ heldur ekki reglulegt
ef L_1 er ekki reglulegt þá er $L_1 \cap L_2$ heldur ekki reglulegt

Dæmi: $L = \{0^m 1^m | m \geq 0\} \quad \sum = \{0, 1\}$

$w = xyz \qquad |y| \geq 1 \qquad |xy| \leq p$
$xy = 0^k \qquad k \leq p$
$y = 0^l$
$w = \underbrace{0^{k-l}}_{x}\underbrace{0^l}_{y} z = \underbrace{0^{k-l}0^l}_{xy}\underbrace{0^{p-k}1^p}_{z}$

Pumpa svo upp um einn

$0^{k-l}\underbrace{0^{l+1}}_{y}\underbrace{0^{p-k}1^p} _{z}= 0^{p+1}1^p \notin L$

Við þurfum ekki að prófa hin tilvikin vegna $|yz| \leq n$

$L = \{0^{n^2}|n \geq 0\} \quad \sum = \{0\}$
$p = n$
$w = xyz \quad |y| \geq 1 \quad |xy| \leq p$
gera bls 82 í sipser

$M = \{w|w \in \{0, 1\} \quad \sum = \{0, 1\}$
Finnum orð sem hagar sér eins og M, L $\subseteq$ M
$L = \{0^n110^n\}|n \geq 0\} \quad \sum = \{0, 1\}$
$p = n$
$w = xyz \quad |y| \geq 1 \quad |xy| \leq p$
gera bls 81 í sipser

2 Context-free

Ekki til prófs í RRR
CFG = PDA = CNF

2.1 CFG

G=(V,$\sum$,S,P)

V	=	Breytur
$\sum$	=	stafróf vélarinnar
S	=	Byrjunastaða
P	=	Umritunarreglur

Dæmi:
málfræði sem samþykkir orðið $0^n 1^n$
$\sum = \{0, 1\}$
$S \to 0S1|\varepsilon$

Closure Properties

$\overline{L}$	Ekki hægt. Sjá $L_1 \cap L_2$
L^*	$L_N \to L_1 L_N \mid \varepsilon$
L^R	Öllum færslum í S og P snúa þeim við. Dæmi S-> aSb verður S->bSa
$L_1 \cup L_2$	$L_N \to L_1 \| L_2$
$L_1 \cap L_2$	Ekki hægt. $L_1 = \{a^i b^j c^k \| i < j\} L_2 = \{a^i b^j c^k \| i < k\}$ Þær eru báðar íContext-free $L_1 \cap L_2 = \{a^i b^j c^k \| i < j$ og $i < k\}$ sem er ekki í Context-free
$L_1 \circ L_2$	$L_N \to L_1 L_2$

2.2 PDA

PDA = (Q,$\sum$, Γ, δ, q$_0$,F)

Q	=	stöður vélarnar
$\sum$	=	stafróf vélarinnar
Γ	=	stafróf vélarinnar og auka stafir sem eru ekki í stafrófinu
δ	=	δ(Q, $\sum$, Γ) -> P(Q,Γ)
q_0	=	$q_0 \in$ Q
F	=	F $\subseteq$ Q Strengurinn er samþykktur

Vélin er með stafla sem er óendanlega langur
Það er allt í lagi að geta farið úr einni stöðu í tvær stöður
Vélin samþykkir strenginn ef hægt er að fara á endann einhvern veginn og lokastaðan er í F

Closure Properties

$\overline{L}$	Ekki hægt
L^*	Búa til leið frá öllum endastöðum yfir á q_0 með ε og F=q_0.
L^R	Snúa öllum örvum við þannig að þær benda í hina áttina. Búa til nýja stöðu q_m og tengja öllum endastöðunum með ε setja q_m sem byrjunar staða og q_0 sem endastöðu
$L_1 \cup L_2$	Búa til nýja stöðu q_m og tengja hana við byrjunarstöðina með ε setja q_m sem byrjunar staða
$L_1 \cap L_2$	Ekki hægt
$L_1 \circ L_2$	Tengja Endastöðurnar í L_1 í byrjunarstöðu á L_2 með ε. Taka svo endarstöður úr L_1

2.3 CNF (Chomsky normal form)

G=(V,$\sum$,S,P)

$$\begin{array}{lcl} \text{V} & = & \text{Breytur} \\ \sum & = & \text{stafróf vélarinnar} \\ S & = & \text{Byrjunastaða} \\ P & = & \text{Umritunarreglur} \end{array}$$

1) A$\rightarrow$BC A,B,C $\in$ V
2) A$\rightarrow$a a $\in \sum$
3) S$\rightarrow \varepsilon$ ε má hvergi vera annars staðar

Closure Properties

$\overline{L}$	Ekki hægt
L^*	$L_N \rightarrow L_1 L_N \mid \varepsilon$
L^R	Breyta henni yfir í CFG og gera eins í CFG og fara með hana svo aftur í CN
$L_1 \cup L_2$	Breyta henni yfir í CFG og gera eins í CFG og fara með hana svo aftur í CN
$L_1 \cap L_2$	Ekki hægt
$L_1 \circ L_2$	$L_N \rightarrow L_1 L_2$

Dæmi:
málfræði sem samþykkir orðið $0^n 1^n$
$\sum = \{0, 1\}$
$S \rightarrow BC|BD|\varepsilon$
$A \rightarrow BC|BD$
$B \rightarrow 0$
$C \rightarrow AD$
$D \rightarrow 1$

2.4 pumpa

$uv^i xy^i z \in A \qquad i = 0, 1, 2, ...$
$|vy| > 0$
$|vxy| \leq p$

Dæmi: $L = \{a^m b^m c^m | m \geq 0\} \quad \sum = \{a, b, c\}$

bls 46 glósur

3 Turing

TM = $(Q, \sum, \Gamma, \delta, q_0, q_+, q_-)$

Q	=	stöður vélarnar
$\sum$	=	stafróf vélarinnar
Γ	=	stafróf vélarinnar og auka stafir sem eru ekki í stafrófinu
δ	=	$\delta(Q, \sum)$ -> Q
q_0	=	$q_0 \in Q$
q_+	=	$q_+ \subseteq Q$ Stöður sem eru samþykktar
q_-	=	$q_- \subseteq Q$ Stöður sem eru ekki samþykktar

Turingvélar eru mun öflugar og eru mun öflugri en venjulegar tölvur því þær eru með endalaust band.
Turing vélar verða ekkert öflugri þó að maður sé með fleiri bönd.
Briðgengar turingvélar eru ekkert öflugri en turningvélar en eru bara fljótari að finna svar.

Closure Properties

$\overline{L}$	Ekki hægt
L^*	Skiptir orðinu alla hugsanlega búta og ef einhver búturinn segir já þá segir vélin já
L^R	
$L_1 \cup L_2$	keyrir samhliða L_1 og L_2 og ef önnur þeirra segir já þá seigir hún já
$L_1 \cap L_2$	Ekki hægt
$L_1 \circ L_2$	Keyrir fyrst L_1 og síðan L_2 og ef báðar segja já þá segir hún já

3.1 A_{DFA}

A_{DFA} = {<M,W> | M er DFA og $w \in L(M)$}
Er turingvél sem hermir eftir DFA vél M á strengnum w
Ákvarðanlegt

3.2 A_{NFA}

A_{NFA} = {<M,W> | M er NFA og $w \in L(M)$}
Er turingvél sem hermir eftir NFA vél M á strengnum w
Ákvarðanlegt

3.3 A_{REX}

A_{REX} = {<M,W> | M er reglulegð segð og $w \in L(M)$}
Er turingvél sem hermir eftir NFA vél M á strengnum w
Ákvarðanlegt

3.4 E_{DFA}

E_{DFA} = {<M> | M er DFA, $L(M) = \varnothing$}
Samþykkir vélina ef hún samþykkir engan streng

Ákvarðanlegt

3.5 EQ_{DFA}

$EQ_{DFA} = \{<A,B> \mid A \text{ og } B \text{ er DFA}, L(A) = L(B)\}$
Samþykkir ef vélarnar samþykkir sömu strengina
$EQ_{DFA} = E_{DFA}(L(A) \cap \overline{L(B)}) \cup (\overline{L(A)} \cap L(B))$
Ákvarðanlegt

3.6 A_{CFG}

$A_{CFG} = \{<M,W> \mid M \text{ er CFG og } W \in L(M)\}$
1) Breytir M yfir CNF
2) Skoða alla strengi lengd $2^{*}|w|-1$ nema þegar lengdin er 0 þá skoða alla strengi að lengdinni 1
3) Er W þar á meðal ef svo er segja já.
Ákvarðanlegt

3.7 E_{CFG}

$E_{CFG}\{<M> \mid M \text{ er CFG og } L(M) = \varnothing\}$
1) Merkjum öll $x \in \sum$
2) höldum svo áfram að merkja þangað til að ekki hægt að merkja meira
3) ef S er ekki merkt þá segjum við já
Ákvarðanlegt

3.8 A_{TM}

$A_{TM} = \{<M,W> \mid M \text{ er TM og } W \in L(M)\}$
Ekki Ákvarðanlegt

3.9 $HALT_{TM}$

3.10 $REGULAR_{TM}$

3.11 E_{TM}

3.12 $\overline{A}_{TM}$

4 Teljanlegt

Endanlegt $\subseteq$ teljanlegt
Mengið N er teljanlegt en óendanlegt
f:N -> N x N

T-ÓÞekkjanlegt. horn-línan...... bls 63-64

5 Falla-mál

5.1 Primitive Recursive

bls 122 í Moret

Zero: N -> N
Succ: N -> N   i := i+1
P_i^k : N^K -> N $(x_1, ..., x_k) -> x_i$

$f(i+1, \overline{x}) = h(i, f(i, \overline{x}), \overline{x})$

Dæmi:

$$\text{Dec:} \begin{array}{lcl} \text{dec}(0) & = & 0 \\ \text{dec}(i+1) & = & \text{P}_2^1(\text{i,dec(i)}) \end{array}$$

$$\text{Add:} \begin{array}{lcl} \text{add}(0, x) & = & \text{P}_1^1(x) \\ \text{add(i+1,x)} & = & \text{Succ}(\text{P}_3^2(\text{i,add(i,x),x})) \end{array}$$

$$\text{Mult:} \begin{array}{lcl} \text{mult}(0, x) & = & 0 \\ \text{mult(i+1,x)} & = & \text{P}_2^3(i, \text{add}(y, \text{mult}(i, x), x)) \end{array}$$

$$\text{Fibonacci:} \begin{array}{lcl} \text{fib}(0) & = & 0 \\ \text{fib(i+1)} & = & \begin{cases} 1 & i = 0 \\ h(i, < i+1, f(i), f(i-1), ..., f(0) >) & \text{annars} \end{cases} \\ \text{h(x,y)} & = & \text{add}(\pi_2(\text{P}_2^2(x, y)), \pi_3(\text{P}_2^2(x, y))) \end{array}$$

Dæmi úr prófi:
$f(0) = a, f(1) = b, f(2) = c, f(i+3) = g(f(i), f(i+1), f(i+2))$

$$\text{f:} \begin{array}{lcl} \text{f(0)} & = & \text{a} \\ \text{f(i+1)} & = & \begin{cases} b & i = 0 \\ c & i = 1 \\ h(i, < i+1, f(i), f(i-1), ..., f(0) >) & \text{annars} \end{cases} \\ h(x, y) & = & g(\pi_3(\text{P}_2^2(x, y)), \pi_2(\text{P}_2^2(x, y)), \pi_1(\text{P}_2^2(x, y))) \end{array}$$

5.2 Parital Recursive

bls 134 í Moret

Dæmi:

5.3 R.E

bls 148 í Moret

Föll sem þurfa ekki að svara við öllum inputum
R.E = Turing
μ Finnur minsta gildið
ψ
ϕ listi af Turing vélum
$K = \{x | \phi_x(x) \downarrow\}$ svipað og halt mengið

Dæmi:
$T = \{x|\phi_x$ is a constant function$\}$
$\Theta(x, y) = 1 + \text{Zero}(\text{U}(x, x))$
$= \varphi_i(x, y) = \varphi_{s(i,x)}(y) = \varphi_{s_{s(i)}(x)}(y) = \begin{cases} 1 & x \in k \\ \perp & x \notin k \end{cases}$
$\varphi s_{s(i)}(x) \in T <=> x \in K$
Hef sýnt fram á að $s_{s(i)}(x)$ sér red frá K til T.

$\overline{K} = \sum^* -K$

Dæmi:

5.4 Rice's Theorem og Recursion

155

Dæmi:

6 Vandamál

6.1 P-TIME

Closure Properties

$\overline{L}$	Keyrir vélina en svara andstæðuna
L^*	Þríhyrningurinn
L^R	
$L_1 \cup L_2$	keyrir samhliða L_1 og L_2 og ef önnur þeirra segir já þá seigir hún já
$L_1 \cap L_2$	Ekki hægt
$L_1 \circ L_2$	Keyrir fyrst L_1 og síðan L_2 og ef báðar segja já þá segir hún já

6.2 NP-TIME

Closure Properties

$\overline{L}$	Ekki hægt
L^*	Giskar á hvernig á að búta stregginn og prófar hann ef það virkar þá segir hún já
L^R	
$L_1 \cup L_2$	keyrir samhliða L_1 og L_2 og ef önnur þeirra segir já þá seigir hún já
$L_1 \cap L_2$	Ekki hægt
$L_1 \circ L_2$	Keyrir fyrst L_1 og síðan L_2 og ef báðar segja já þá segir hún já

6.3 P-SPACE

Closure Properties

$\overline{L}$	Ekki hægt
L^*	Trixið hér er að láta hana bara geyma eina skiptingu.
L^R	
$L_1 \cup L_2$	
$L_1 \cap L_2$	Ekki hægt
$L_1 \circ L_2$	

7 Annað

Prefix = sem kemur á undan
suffix = sem kemur að aftan frá

$L_1 - L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup L_2}$
Endanleg mál $\subseteq$ Regluegmál $\subseteq$ PDA $\subseteq$ TM $\subseteq \sum^*$